WIGHTMANFELDER MIT GEMEINSAMER RESTRIKTION AUF EINEN UNTERRAUM

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Michael Schmidt
aus Wuppertal

Institut für theoretische Physik

Göttingen 1973

WIGHTMANFELDER MIT GEMEINSAMER RESTRIKTION AUF EINEN UNTERRAUM

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Michael Schmidt
aus Wuppertal

Institut für theoretische Physik

Göttingen 1973

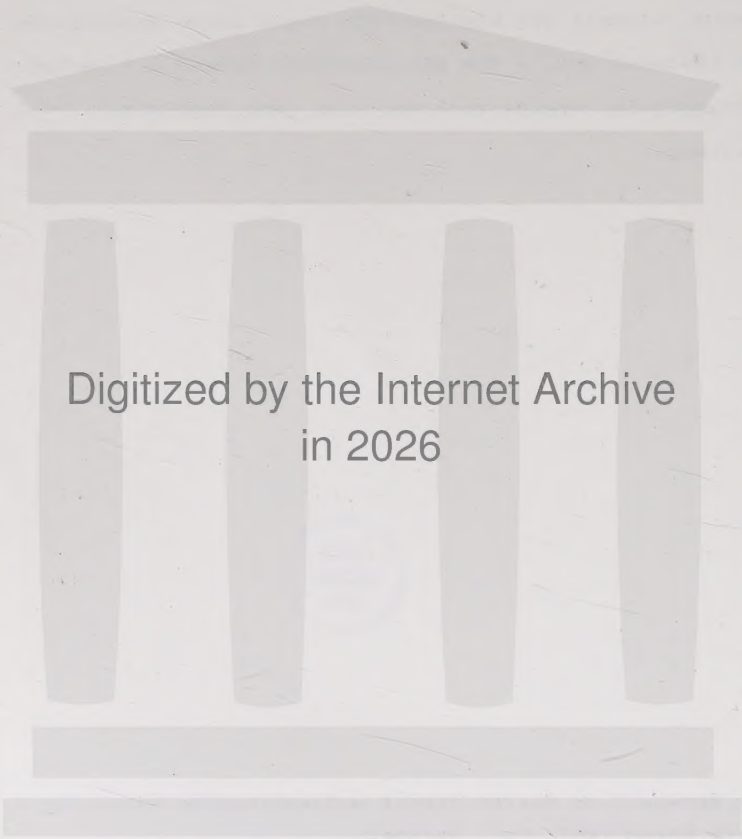
UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D 7
Referent: Prof. Dr. H.J. Borchers
Korreferent: Prof. Dr. H. Reeh
Tag der mündlichen Prüfung: 20. Dez. 1973

Zusammenfassung

Betrachtet werden verschiedene Restriktionen eines Wightmanfeldes auf eine 3- oder 2-dimensionale Raumzeit. Es wird untersucht, wieweit ein Wightmanfeld durch seine Restriktion bereits bestimmt ist. - Für die gesuchten Felder mit gemeinsamer Restriktion ergibt sich nur eine sehr implizite Beschreibung.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und zahlreiche Gespräche danke ich Herrn Prof. H.J. Borchers.
Herrn J. Steppeler, Herrn J. Yngvason und Herrn Prof. H. Reeh bin ich dankbar für weitere Gespräche und die Beantwortung von Fragen.


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534919_0056

Inhaltsverzeichnis

		Seite
	Einleitung	1
I.	Definition und einige Eigenschaften von Wightmanfeldern	4
II.	Restriktionen eines Wightmanfeldes	10
III.	Felder mit gemeinsamer Restriktion	17
IV.	Die Darstellungen $U(a,\Lambda)$ zu asymptot. vollständigen Feldern	23
V.	Zu den Restriktionen vom Typ A	27
	Literaturverzeichnis	37

Einleitung

In der Wightman-theorie [1] werden bekanntlich die Feldoperatoren A nicht auf den Punkten $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ der Raumzeit definiert, sondern auf einem Raum von Testfunktionen $\varphi = \varphi(x)$; man wählt meistens $\varphi \in \mathcal{S}(R^4)$, also φ eine schnell abfallende C^∞-Funktion:

$$A(\varphi) = \int dx\, \varphi(x)\, A(x)$$

A(x) selbst ist kein wohldefinierter Operator im Hilbertraum.

Nach einem Ergebnis von Borchers [2] genügt aber bereits die "Verschmierung" in der Zeitvariablen x_0, um einen wohldefinierten Operator im Hilbertraum zu bekommen ; das heißt,

$$A_f(\underline{x}) = \int dx_0\, f(x_0)\, A(x_0, \underline{x}) \quad ; \quad (f(x_0) \in \mathcal{S}(R^1);\ \underline{x} = (x_1, x_2, x_3))$$

ist ein unbeschränkter Operator mit dichtem Definitionsbereich. (Vgl. Kap.I)

Man kann deshalb die Restriktion des Feldoperators $A_f(\underline{x})$, $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, auf einen Unterraum des R^3 bilden, z.B.

$$A_f(\underline{x}') = A_f(x_1, x_2, 0) \quad \text{oder} \quad A_f(\underline{x}'') = A_f(x_1, 0, 0).$$

Für ein skalares Wightmanfeld schreiben wir

$$\mathcal{W} = \left\{ H,\ U(g),\ A_f(\underline{x}) \right\},$$

wobei H der Hilbertraum ist, in dem $A_f(\underline{x})$ definiert ist, und $U(g)$, $g \in P_+^\uparrow$, die unitäre Darstellung ([6] , [7] , [8]) der Poincaré-Gruppe $P_+^\uparrow$, unter der sich $A_f(\underline{x})$ transformiert. — Zu der Restriktion, z.B. $A_f(\underline{x}')$, des Feldoperators nehmen wir die Restriktion der Darstellung U(g) auf eine Untergruppe hinzu, nämlich die Untergruppe aller $g' \in P_+^\uparrow$, die den Unterraum $(x_0, \underline{x}') = (x_0, x_1, x_2, 0)$ invariant lassen. -

Diese Restriktion von $\mathcal{W}$ nennen wir "vom Typ A1" und schreiben (vgl. Def. 2-A1, Kap.II) :

$$\mathcal{W}\big|_{(A1)} = \{H,\ U(g'),\ A_f(\underline{x}')\}$$

Die Polynome in $A_f(\underline{x}')$, angewandt auf den Vakuumzustand Ψ_o, liefern (zumindest, wenn das Feld kovariant unter der Raumspiegelung ist) einen echten Teilraum H' von H. (vgl. Lemma 1, Kap.II)

Man kann deshalb eine stärkere Restriktion als $\mathcal{W}\big|_{(A1)}$ definieren (genannt vom "Typ B1"), indem man die Operatoren $U(g')$ und $A_f(\underline{x}')$ nur auf H' betrachtet. (vgl. Def.2-B1) —

Mit $A_f(\underline{x}")$, $\underline{x}" = (x_1,0,0)$, kann man entsprechende Restriktionen bilden (vgl. Def.2-A2, 2-B2 und Lemma 2).

Wir untersuchen nun folgendes Problem:

Gegeben sei ein Wightmanfeld $\mathcal{W}$ und seine Restriktion $\mathcal{W}\big|_{(..)}$ von einem der Typen, die wir definiert haben. - Zu bestimmen sind alle Wightmanfelder $\tilde{\mathcal{W}}$, die dieselbe Restriktion (von diesem Typ) haben ,d.h. alle $\tilde{\mathcal{W}}$ mit $\tilde{\mathcal{W}}\big|_{(..)} = \mathcal{W}\big|_{(..)}$.

Wenn $\mathcal{W}$ ein freies oder verallgemeinertes freies Feld ist, sieht man leicht: $\tilde{\mathcal{W}}$ ist bis auf Unitäräquivalenz gleich $\mathcal{W}$. - Im allgemeinen gibt es aber vermutlich auch inäquivalente Felder mit gemeinsamer Restriktion. (Siehe Kap. III)

Zunächst wird man das Problem für die schwächeren Restriktionen vom Typ A zu lösen versuchen. Wir gehen dazu so vor:

Wir fragen zuerst nach den Darstellungen $U(g)$, die eine vorgegebene Restriktion auf eine Untergruppe G' (bzw. G") haben. - Zur Vereinfachung machen wir dabei über die

betrachteten Wightmanfelder nach Haag-Ruelle-Jost [3], [4] die zusätzliche Annahme der asymptot. Vollständigkeit des Hilbertraums H. - Daraus ergibt sich, daß für U(g) nur die Darstellungen zu einem freien Feld in Betracht kommen.

Man kann leicht zeigen (Lemma 3, Kap.IV), daß zwei Darstellungen dieses Typs unitär äquivalent sind, wenn sie dieselbe Restriktion auf die Untergruppe G' (oder G") haben.

Das bedeutet aber offenbar noch nicht, daß auch die zugehörigen Feldoperatoren unitär äquivalent sind. Man muß untersuchen, welche Darstellungen der Form $\tilde{U}(g) = V\, U(g)\, V^*$ (V unitär) zusammen mit der gegebenen Restriktion $A_f(\underline{x}')$ (bzw. $A_f(\underline{x}")$) ein Wightmanfeld definieren.

Lemma 4 (Kap. V) beschreibt die gesuchten Felder $\tilde{W}$, allerdings nur sehr implizit. - Für eine explizite Antwort wäre die Auswertung bestimmter Bedingungen nötig, die leider schwierig zu sein scheint.

Eine Lösung des Problems ist deshalb nur zu einem kleinen Teil erreicht.

I. Definition und einige Eigenschaften von Wightmanfeldern

Wir betrachten der Einfachheit halber nur hermitesche skalare Felder.

Unter einem Wightmanfeld versteht man ein Objekt

$$\mathcal{W} = \{H,\ U(a,\Lambda),\ A(\varphi)\}$$

mit folgenden Eigenschaften (siehe [1], Kap.3) :

(0) H ist ein separabler Hilbertraum,

$U(a,\Lambda)$ eine stetige unitäre Darstellung der inhomogenen Lorentzgruppe (Poincaré-Gruppe), genauer: der Gruppe $P_+^\uparrow$ (Zusammenhangskomponente der Eins in der vollen Poincaré-Gruppe)

$U(a,\Lambda)$ genügt der Spektrumsbedingung, d.h. der Operator $P = (P_o,P_1,P_2,P_3)$, definiert durch $U(a,1) = e^{iP\cdot a}$, hat ein Spektrum, das im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel $\bar{V}_+$ enthalten ist.

$(P\cdot a = P_o a_o - P_1 a_1 - P_2 a_2 - P_3 a_3)$

Es gibt einen bis auf einen Zahlenfaktor eindeutig bestimmten "Vakuumzustand" Ψ_o:

$U(a,\Lambda)\Psi_o = \Psi_o$ (Invarianz des Vakuums)

Aus $U(a,\Lambda)\Psi = \Psi \Rightarrow \Psi = c\Psi_o$ (Eindeutigkeit des Vakuums)

(1) $A(\varphi)$ ein skalarer, hermitescher Feldoperator mit folg. Eigenschaften: $\varphi \in \mathcal{S}(R^4)$, also φ eine schnell abfallende, ∞ oft differenzierbare Funktion.

$A(\varphi)$ ist definiert auf einer in H dichten Menge D+),

+) Später formulieren wir etwas heuristisch und lassen D unerwähnt.

wobei $\Psi_0 \in D$; $U(a,\Lambda)\ D \subset D$; $A(\varphi)\ D \subset D$

$A(\varphi)$ ist hermitesch, d.h. $(\Psi_1, A(\varphi)\Psi_2) = (A(\bar{\varphi})\Psi_1, \Psi_2)$

für $\Psi_1, \Psi_2 \in D$

(2) Kovarianz von $A(\varphi)$ unter $U(a,\Lambda)$:

$U(a,\Lambda)\ A(\varphi)\ U(a,\Lambda)^* \Psi = A(\varphi_{(a,\Lambda)})\Psi$,

wobei $\varphi_{(a,\Lambda)}(x) =: \varphi(\Lambda^{-1}(x - a))$ und $\Psi \in D$

(3) Lokale Kommutativität:

Für 2 Testfunktionen φ_1, φ_2 mit raumartig getrennten Trägern, d.h. $\varphi_1(x)\ \varphi_2(y) = 0$ für alle Punkte x, y mit $(x - y)^2 < 0$, gilt: +)

$(A(\varphi_1)A(\varphi_2) - A(\varphi_2)A(\varphi_1))\Psi =: [A(\varphi_1), A(\varphi_2)]\Psi = 0 \quad (\Psi \in D)$

(4) Zyklizität des Vakuums:

Ψ_0 ist zyklischer Vektor für die Feldoperatoren $A(\varphi)$, d.h. Polynome in $A(\varphi_1)$, $A(\varphi_2)$, ..., auf Ψ_0 angewandt, liefern eine in H dichte Menge D_0. (Wegen (1) ist $D_0 \subset D$)

Die Forderung der "asymptotischen Vollständigkeit" des Hilbertraums nehmen wir erst später dazu. (Siehe Kap. IV)

Der Einfachheit halber kann man für alle Felder denselben Hilbertraum H nehmen, da alle separablen Hilberträume untereinander isomorph sind.

+) Statt $u \cdot u = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2$ schreiben wir auch u^2

Borchers hat in [2] gezeigt, daß der Feldoperator, der zunächst nur im Sinne $A(\varphi) = \int d^4x\, \varphi(x)\, A(x)$ $(x = (x_0, x_1, x_2, x_3))$ erklärt war, eine stetige Funktion der räumlichen Koordinaten x_1, x_2, x_3 ist, wenn die "Verschmierung" mit einer Testfunktion in der x_0- Koordinate gemacht wird.

Die Aussage ist folgende: (siehe [2] S.1602 und Theorem S.1605)

Satz (Borchers):

Betrachtet wird ein (skalares) Feld $A(\varphi)$, das definiert ist für Testfunktionen $\varphi(x) \in \mathcal{S}(R^4)$; $A(\varphi)$ soll die vorhin genannten Forderungen erfüllen; (die Kovarianz von $A(\varphi)$ gegen homogene Lorentztransformationen und die lokale Kommutativität dürfen fehlen).

Dann gilt:

Für jede Testfunktion $f(x_0) \in \mathcal{S}(R^1)$ ist der Ausdruck

$$A_f(\underline{x}) = \int dx_0 f(x_0) A(x_0, \underline{x}) \qquad (\underline{x} = (x_1, x_2, x_3))$$

definiert als unbeschränkter Operator und es gilt:

(1) $A_f(\underline{x})$ besitzt einen in H dichten Definitionsbereich D_0 mit $A_f(\underline{x})\, D_0 \subset D_0$

(2) Sei $\Psi \in D_0$; dann ist $A_f(\underline{x})\Psi$ bezüglich $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ∞ oft differenzierbar.

Die Normen $\| A_f(\underline{x})\Psi \|$ und $\left\| \frac{\partial^{n_1}}{(\partial x_1)^{n_1}} \frac{\partial^{n_2}}{(\partial x_2)^{n_2}} \frac{\partial^{n_3}}{(\partial x_3)^{n_3}} A_f(\underline{x})\, \Psi \right\|$ sind bezüglich $\underline{x}$ durch Polynome beschränkt.

Im Folgenden wird nur die Aussage (1) benutzt.

Wir brauchen später folgende bekannte Definition:

Definition 1:

Zwei Wightmanfelder $\mathcal{W} = \{H, U(a,\Lambda), A(\varphi)\}$ und $\tilde{\mathcal{W}} = \{H, \tilde{U}(a,\Lambda), \tilde{A}(\varphi)\}$ heißen unitär äquivalent, wenn es auf H einen unitären Operator V gibt, so daß $\tilde{D} = VD$; $\tilde{U}(a,\Lambda) = VU(a,\Lambda)V^*$; $\tilde{A}(\varphi) = VA(\varphi)V^*$;($D,\tilde{D}$ = Definitionsbereiche von $A(\varphi)$ bzw. $\tilde{A}(\varphi)$).

Bemerkung: Wegen des folgenden Hilfssatzes sind zwei Felder $\mathcal{W}$ und $\tilde{\mathcal{W}}$ bereits dann unitär äquivalent, wenn es ein unitäres V gibt, so daß $\tilde{D} = VD$; $\tilde{A}(\varphi) = V\,A(\varphi)\,V^*$.

Hilfssatz 1: (wohlbekannt)

In einem Wightmanfeld $\mathcal{W} = \{H, U(a,\Lambda), A(\varphi)\}$ wird die Darstellung $U(a,\Lambda)$ durch den Feldoperator $A(\varphi)$ eindeutig bestimmt.

Beweis:

Angenommen, das Feld $A(\varphi)$ sei kovariant unter 2 verschiedenen Darstellungen $U(a,\Lambda)$ und $\tilde{U}(a,\Lambda)$. Dann ist

$U(a,\Lambda)\,A(\varphi)\,U(a,\Lambda)^*\Psi = A(\varphi_{(a,\Lambda)})\Psi = \tilde{U}(a,\Lambda)\,A(\varphi)\,\tilde{U}(a,\Lambda)^*\Psi$

für jeden Vektor $\Psi \in D$ (Def.bereich von $A(\varphi)$).

$\Rightarrow \left[\tilde{U}(a,\Lambda)^*\,U(a,\Lambda),\ A(\varphi)\right]\Psi = 0$

Der Operator $\tilde{U}(a,\Lambda)^*\,U(a,\Lambda)$ erfüllt die Voraussetzungen von Theorem 4-5 in [1], (Irreduzibilität von $A(\varphi)$). Deshalb ist in ganz H $\tilde{U}(a,\Lambda)^*U(a,\Lambda) = c(a,\Lambda)\cdot 1$; die Zahl c könnte von (a,Λ) abhängen; weil aber $\tilde{U}$ und U Darstellungen von $P_+^\uparrow$ sind, ist auch $c(a,\Lambda)$ eine (1-dimens.) Darstellung von $P_+^\uparrow$ und muß deshalb die triviale Darst. sein: $c(a,\Lambda) = 1$ für alle (a,Λ). Also ist $\tilde{U}(a,\Lambda) = U(a,\Lambda)$.

Außerdem brauchen wir noch

Hilfssatz 2 :(ebenfalls bekannt)

Sei $U(a,\Lambda)$ eine unitäre Darstellung von $P_+^\uparrow$ im Hilbertraum H

mit den Eigenschaften: (P_i (i = 0,1,2,3) die Erzeugenden der Translationen U(a,1)):

(i) $P_o^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 \geq 0$ (Spektralbedingung)

(ii) U(a,Λ) enthält außer der trivialen Darstellung keine Unterdarstellung+) vom Typ $P_i \equiv 0$ (i=0,1,2,3)

(iii) für $\Psi_o \in H$ gilt: $U(a,\Lambda)\Psi_o = \Psi_o$ und: wenn $U(a,\Lambda)\Psi = \Psi$, dann $\Psi = c\Psi_o$ ($c \in \mathbb{C}$)

Dann folgt: Außer Ψ_o gibt es keinen unter den Zeittranslationen $U(\bar{a},1)$ invarianten Zustand, also:
Wenn $U(\bar{a},1)\hat{\Psi} = \hat{\Psi}$ für $\bar{a} = (a_o,0,0,0)$ und ein $\hat{\Psi} \in H$, dann ist $\hat{\Psi} = c\Psi_o$.

Bemerkung: In der Wightmantheorie erfüllt U(a,Λ) außer (i) und (iii) auch die Forderung (ii). Siehe Wightman [5], Theorem d Seite 91.

Beweis:
Angenommen wird $U(\bar{a},1)\hat{\Psi} = \hat{\Psi}$ für die Zeittranslationen $\bar{a} = (a_o,0,0,0)$ und einen Vektor $\hat{\Psi} \in H$.
Mit $U(\bar{a},1) = e^{ia_oP_o}$ folgt $P_o\hat{\Psi} = 0$. (Z)
Bedingung (i), für den Vektor $\hat{\Psi}$ geschrieben, ist

$$-(\hat{\Psi},(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)\hat{\Psi}) \geq 0$$

Da die Erzeugenden P_i hermitesch sind, folgt

$$\|P_1\hat{\Psi}\|^2 + \|P_2\hat{\Psi}\|^2 + \|P_3\hat{\Psi}\|^2 \leq 0$$

Das ist nur möglich, wenn $\|P_i\hat{\Psi}\| = 0$ für i = 1,2,3.

+) Zur Klassifizierung der unitären Darstellungen von $P_+^\uparrow$ siehe Wigner [6], Mackey [7] oder Shirokov [9], Teil II,III

Das heißt $P_i\hat{\Psi} = 0 \qquad (i = 1,2,3)$;

Mit (Z) also $P_i\hat{\Psi} = 0$ für $i = 0,1,2,3$; wir bezeichnen mit $\hat{H}$ den Teilraum von H, der von den Vektoren $U(0,\Lambda)\hat{\Psi}$ aufgespannt wird. - Wegen der Vertauschungsrelationen+) zwischen den P_i und den Erzeugenden M_{jk} der Lorentztransformationen $U(0,\Lambda)$ folgt: $P_i\Psi = 0$ für alle $\Psi \in \hat{H}$ $(i = 0,1,2,3)$.

Im Teilraum $\hat{H}$ ist $U(a,\Lambda)$ also eine Darstellung vom Typ $P_i \equiv 0$. Nach der Forderung (ii) muß $U(a,\Lambda)\big|_{\hat{H}}$ die triviale Darstellung sein, d.h. $U(a,\Lambda)\Psi = \Psi$ für $\Psi \in \hat{H}$.

Wegen (iii) bedeutet das $\Psi = c\Psi_o \qquad (c \in \mathbb{C})$, also auch $\hat{\Psi} = c\Psi_o$.

+) siehe z.B. Shirokov [9], Teil I, Abschn. 8

II. Restriktionen eines Wightmanfeldes

Aus dem Borchers'schen Satz (Kap.I) ergibt sich:
Der Feldoperator in der Form $\int dx_o\ f(x_o)\ A(x_o,\underline{x}) = A_f(\underline{x})$
ist für jeden Punkt $\underline{x} = (x_1,x_2,x_3) \in R^3$ wohldefiniert;
deshalb ist auch die Restriktion von $A_f(\underline{x})$ auf einen Unterraum des R^3 wohldefiniert.
Man kann z.B. folgende Unterräume betrachten:

(1) die Vektoren $\underline{x}' = (x_1,x_2,0)$

(2) die Vektoren $\underline{x}'' = (x_1,0,0)$

Wir benutzen folg. Bezeichnungen:
M = 4-dimens. Raumzeit, Punkte $x = (x_o,\underline{x})$, $y = (y_o,\underline{y})$,....
mit dem Skalarprodukt $x\cdot y = x_o y_o - \underline{x}\cdot\underline{y}$;
(für $x\cdot x = x_o^2 - (\underline{x})^2$ wird auch x^2 geschrieben.)
M' =3-dimens. Raumzeit, Punkte $x' = (x_o,\underline{x}') = (x_o,x_1,x_2,0)$
M'' =2-dimens. " , Punkte $x'' = (x_o,\underline{x}'') = (x_o,x_1,0,0)$
Statt (a,Λ) schreiben wir auch g, statt $P_+^\uparrow$ auch G. +)
Man erhält die Restriktion eines Wightmanfeldes $\mathcal{W} = \left\{H,\ U(g),A_f(\underline{x})\right\}$, wenn man zu der Restriktion des Feldoperators $A_f(\underline{x})$ die Restriktion der unitären Darstellung $U(g)$ auf eine Untergruppe hinzunimmt, nämlich die Untergruppe der Transformationen $g \in G$, die den betrachteten Unterraum von M auf sich abbilden.

Wir definieren folgende Typen von Restriktionen eines Wightmanfeldes $\mathcal{W} = \left\{H,\ U(g),\ A_f(\underline{x})\right\}$.

+) $f = f(x_o)$ ist eine Testfunktion wie bisher.

Definition 2-A1 ("Restriktion vom Typ A1"):

$$\mathcal{W}\big|_{(A1)} =: \left\{ H,\ U(g'),\ A_f(\underline{x}') \right\}$$

H ist derselbe Hilbertraum wie in dem uneingeschränkten Feld $\mathcal{W}$, $A_f(\underline{x}')$ ist die Restriktion des Feldoperators auf die Punkte $\underline{x}' = (x_1, x_2, 0)$ des R^3. $U(g')$, $g' \in G'$, ist die Restriktion der Darstellung $U(g)$ auf folgende Untergruppe G' von G:

$$G' = \left\{ g' \in G;\ g'x' = y' \text{ mit } y' \in M' \text{ für alle } x' \in M' \right\}$$

G' enthält 6 ein-parametrige Untergruppen und 2 diskrete Transformationen, nämlich

(i) die Translationen $a' = (a_0, a_1, a_2, 0)$,

(ii) die Drehungen $R_{12}(\vartheta)$ in der 1-2-Ebene,

(iii) die eigentlichen Lorentztransformationen $L_{01}(\chi_1)$, $L_{02}(\chi_2)$ in der 0-1- und 0-2-Ebene,

(iv) die diskreten Drehungen $R_{13}(\pi)$ und $R_{23}(\pi)$, d.h. die 1-3- und 2-3-Drehungen um $\pi = 180^o$.

Definition 2-A2 ("Restriktion vom Typ A2"):

$$\mathcal{W}\big|_{(A2)} =: \left\{ H,\ U(g''),\ A_f(\underline{x}'') \right\}$$

H ist wieder der ursprüngliche Hilbertraum.

$A_f(\underline{x}'')$ ist die Restriktion von $A_f(\underline{x})$ auf den Unterraum $\left\{ \underline{x}'' = (x_1, 0, 0) \right\}$ des R^3.

$U(g'')$, $g'' \in G''$, ist die Restriktion von $U(g)$ auf folg. Untergruppe G''; G'' soll enthalten:

(i) die Translationen $a'' = (a_0, a_1, 0, 0)$

(ii) die eigentlichen Lorentztransformationen $L_{01}(\chi)$ in der 0-1-Ebene

(iii) die diskrete Drehung $R_{12}(\pi)$, d.h. die Drehung in der 1-2-Ebene um $\pi = 180^o$.

Man sieht, daß in dieser Definition von G" nicht alle Transformationen $\in G$ enthalten sind, die M" fest lassen; das sind außer den Transformationen (i),(ii),(iii) noch die Drehungen R_{23} in der 2-3-Ebene; diese betrachten wir hier nicht mit, weil sie M" punktweise festlassen.

Genauer kann man sagen:

Sei $\hat{G}$ die Untergruppe aller $g \in G$, die den Unterraum M" festlassen; sei G_o die Untergruppe aller $g \in G$, die M" punktweise festlassen. $\hat{G}$ besteht aus (i),(ii),(iii) und den R_{23}, G_o aus den R_{23}.

Man kann leicht nachprüfen, daß G_o Normalteiler in $\hat{G}$ ist. - Wir betrachten hier die Faktorgruppe $\hat{G}/G_o$.

Definition 2-B1 ("Restriktion vom Typ B1"):

$$\mathcal{W}\Big|_{(B1)} =: \left\{ H',\ U'(g'),\ A'_f(\underline{x}') \right\}$$

Dabei ist H' der Teilraum von H, der von den Polynomen in $A_f(\underline{x}') = A_f(x_1 x_2, 0)$,angewandt auf das Vakuum Ψ_o,erzeugt wird:

$$H' =: \left\{ \text{Polynom}\,(A_{f_1}(\underline{x}'),\ A_{f_2}(\underline{y}'),\ldots)\ \Psi_o \right\}$$

(Querstrich bedeutet die Abschließung des lin. Raumes $\left\{....\right\}$.)

H' ist ein echter Teilraum von H mindestens dann, wenn $A_f(\underline{x})$ kovariant unter der Raumspiegelung I_s ist (siehe das folgende Lemma 1).

H' ist offenbar invariant unter den Operatoren $A_f(\underline{x}')$, (d.h. die dichte Menge $\left\{....\right\}$ ist invariant unter $A_f(\underline{x}')$.)

$A'_f(\underline{x}')$ bezeichnet die Restriktion von $A_f(\underline{x}')$ (vgl.Def.2-A1) auf den Teilraum H':

$$A'_f(\underline{x}') =: A_f(\underline{x}')\Big|_{H'}$$

Ebenso: H' ist invariant unter der Darstellung $U(g')$, $g' \in G'$. (siehe Def.2-A1). $U'(g')$ bezeichnet die Restriktion von $U(g')$ auf den Teilraum H':

$$U'(g') =: U(g')\Big|_{H'}$$

Definition 2-B2 ("Restriktion vom Typ B2"):

$$\mathcal{W}\Big|_{(B2)} =: \left\{H'',\ U''(g''),\ A_f''(\underline{x}'')\right\}$$

H" ist der von den Polynomen in $A_f(\underline{x}'') = A_f(x_1,0,0)$, angewandt auf das Vakuum Ψ_o, erzeugte Teilraum von H.

$$H'' = \overline{\left\{\text{Polynom}\ (A_{f_1}(\underline{x}''),\ A_{f_2}(\underline{y}''),\ldots)\Psi_o\right\}}$$

(Querstrich bedeutet die Abschließung.)

H" ist immer ein echter Teilraum von H, (siehe das folg. Lemma 2).

H" ist offenbar invariant unter $A_f(\underline{x}'')$ und unter $U(g'')$, $g'' \in G''$ (siehe Def. 2-A2).

Wir bezeichnen mit $A_f''(\underline{x}'')$ die Restriktion

$$A_f''(\underline{x}'') =: A_f(\underline{x}'')\Big|_{H''}$$

und mit $U''(g'')$ die Restriktion

$$U''(g'') =: U(g'')\Big|_{H''} .$$

Die folgenden beiden Lemmata 1 und 2 sagen aus, daß die in Def. 2-B1 und 2-B2 definierten Räume H' und H" echte Teilräume von H sind. - Im Falle H' (Lemma 1) ist für den Beweis die Voraussetzung nötig, daß das Feld $A_f(\underline{x})$ außer unter $P_+^\uparrow$ auch unter der Raumspiegelung I_s kovariant ist.

Lemma 1:

Wenn der Feldoperator $A_f(\underline{x})$ eines Wightmanfeldes kovariant unter der Raumspiegelung I_s ist, dann ist

$H' = \overline{\left\{\text{Polynom}\,(A_{f_1}(\underline{x}'),\ A_{f_2}(\underline{y}'),\ \ldots)\,\Psi_o\right\}}$, $\underline{x}' = (x_1,x_2,0)$ usw., ein echter Teilraum von H.

Beweis:

I_s ist definiert als $I_s\,(x_o,\underline{x}) = (x_o,-\underline{x})$.

$A_f(\underline{x})$ ist kovariant unter I_s, bedeutet: es gibt einen unitären Operator, z.B. $U(I_s)$ genannt, so daß

$$U(I_s)\,A_f(\underline{x})\,U(I_s)^* = A_f(-\underline{x})\ . \qquad (a)$$

Nach dem Theorem 3-8 in [1] folgt daraus:

$$U(I_s)\Psi_o = e^{i\alpha}\Psi_o \quad \text{und} \quad U(I_s)\,U(a,\Lambda)\,U(I_s)^* = U(I_s a, I_s\Lambda I_s) \qquad (b)$$

Wir betrachten nun den unitären Operator

$$U(I_3) := U(I_s)\,U(0,\hat{R}) \quad \text{mit } \hat{R} = R_{12}(\pi)\ , \text{ d.h.}$$

$$\hat{R}\,(x_1,x_2,x_3) = (-x_1,-x_2,x_3)\ .$$

$U(0,\hat{R})$ sei der zu $\hat{R}$ gehörende Operator aus der Darstellung $U(a,\Lambda)$ zu $A_f(\underline{x})$. Mit (a) folgt

$$\left.\begin{aligned} &U(I_3)\,A_f(\underline{x})\,U(I_3)^* = U(I_s)\,U(0,\hat{R})\,A_f(\underline{x})\,U(0,\hat{R})^*U(I_s)^* = \\ &= U(I_s)\,A_f(\hat{R}\underline{x})\,U(I_s)^* = A_f(-\hat{R}\underline{x}) = A_f(I_3\underline{x}) \quad \text{mit } I_3 = I_s\hat{R} \end{aligned}\right\}(c)$$

Also ist $\left[U(I_3),\ A_f(\underline{x}')\right] = 0$ für $\underline{x}' = (x_1,x_2,0)$; (d)

zusammen mit (b) ergibt sich

$U(I_3)\Psi' = e^{i\alpha}\Psi'$ für jedes $\Psi' = \text{Polynom}\,(A_{f_1}(\underline{x}'),\ldots)\Psi_o$,

d.h. auf ganz H' ist $U(I_3) = e^{i\alpha}\cdot 1$ (e)

Angenommen, es wäre H' = H.

Aus (b) folgt für $U(I_3)$: $U(I_3)\,U(a,\Lambda)\,U(I_3)^* = U(I_3 a, I_3\Lambda I_3)$ (f)

Unsere Annahme ergäbe wegen (e) : $U(I_3) = e^{i\alpha}\cdot 1$ auf ganz H.

Wir betrachten (f) speziell für Elemente $(a,\Lambda) = (0,R_{23})$;

$R_{23} = R_{23}(\vartheta)$ bezeichnet eine Drehung in der 2-3-Ebene um einen Winkel ϑ;

$\Rightarrow$ $U(0,R_{23}) = U(0,I_3R_{23}I_3) \Rightarrow 1 = U(0,R_{23}^{-1}I_3R_{23}I_3)$

Das Element $(0,R_{23}^{-1}I_3R_{23}I_3) \in P_+^\uparrow$ ist i.a. verschieden vom Einselement $(0,1) \in P_+^\uparrow$. Der kleinste Normalteiler von $P_+^\uparrow$, der dieses Element enthält, ist aber $P_+^\uparrow$ selbst. +)

Die Darstellung $U(a,\Lambda)$ müßte deshalb sein $U(a,\Lambda) = 1$ für alle $(a,\Lambda) \in P_+^\uparrow$. Das ist für ein Wightmanfeld unmöglich; (Widerspruch mit der Eindeutigkeit des Vakuums, da der Hilbertraum H nicht 1-dimens. ist.)

Lemma 2:

Sei $\mathcal{W} = \{ H, U(a,\Lambda), A_f(\underline{x}) \}$ ein Wightmanfeld.

Dann ist $H'' = \overline{\{ \text{Polynom } (A_{f_1}(\underline{x}''), A_{f_2}(\underline{y}''),\ldots)\, \Psi_o \}}$,

($\underline{x}'' = (x_1,0,0)$, $\underline{y}'' = (y_1,0,0)$ usw.) ein echter Teilraum von H.

Beweis:

Aus der Lorentzkovarianz des Feldes folgt:

$$\left[U(0,R_{23}),\ A_f(\underline{x}'')\right] = 0, \qquad \underline{x}'' = (x_1,0,0)\ ,$$

für die Drehungen R_{23} in der 2-3-Ebene.

Mit $U(0,R_{23})\Psi_o = \Psi_o$ ergibt sich

$$U(0,R_{23})\Psi = \Psi \text{ für } \Psi = \text{Polynom } (A_{f_1}(\underline{x}''), A_{f_2}(\underline{y}''),\ldots)\Psi_o$$

Also ist in ganz H'' $\qquad U(0,R_{23}) = 1\ .$ (a)

Angenommen, H'' = H.

In der Darstellung $U(a,\Lambda)$ wäre deshalb nach (a) $U(0,R_{23}) = 1$ für alle Drehungen R_{23} in der 2-3-Ebene. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 1 können wir schließen: Der kleinste Normalteiler von $P_+^\uparrow$, der die Elemente $(0,R_{23})$ enthält, ist $P_+^\uparrow$ selbst.

+) Die Gruppe $P_+^\uparrow$ enthält nur einen nicht-trivialen Normalteiler, nämlich die Untergruppe der Translationen $\{(a,1)\}$.

Deshalb muß sein: $U(a,\Lambda) = 1$ für alle $(a,\Lambda) \in P_+^\uparrow$.

Das ist in der Feldtheorie unmöglich.

Korollar:

Ähnlich kann man zeigen, daß H" ein echter Teilraum von H' ist; zum Beweis benutzt man die Drehung $R_{23}(\pi)$.

III. Wightmanfelder mit gemeinsamer Restriktion

Im vorigen Abschnitt wurden verschiedene Typen von Restriktionen eines Wightmanfeldes definiert (Def. 2-A1; -A2; -B1; -B2)

Unser Problem ist nun:

Gegeben sei ein festes Wightmanfeld $\mathcal{W} = \{H, U(g), A_f(\underline{x})\}$ [+)] und seine Restriktion $\mathcal{W}|_{(\ldots)}$ von einem der Typen A1,..., B2.

Welche Wightmanfelder $\tilde{\mathcal{W}} = \{H, \tilde{U}(g), \tilde{A}_f(\underline{x})\}$ haben dieselbe Restriktion (von dem betreffenden Typ) ?

Wir betrachten zunächst als Beispiel das verallgemeinerte freie Feld. Hier gibt es eine einfache Lösung (auch für den Fall der stärkeren Restriktionen vom Typ B).

Beispiel: (Verallgem. freies Feld)
Sei $\mathcal{W} = \{H, U(g), A_f(\underline{x})\}$ ein verallgem. freies Feld
und $\tilde{\mathcal{W}} = \{H, \tilde{U}(g), \tilde{A}_f(\underline{x})\}$ ein beliebiges Feld mit derselben Restriktion vom Typ B2, d.h. $\tilde{\mathcal{W}}|_{(B2)} = \mathcal{W}|_{(B2)} =$
$= \{H'', U''(g''), A_f''(\underline{x}'')\}$.
Dann ist $\tilde{\mathcal{W}}$ unitär äquivalent zu $\mathcal{W}$.

Korollar:
Spezialfall ist das freie Feld : Sei $\mathcal{W}$ ein freies Feld (zur Masse m) und $\tilde{\mathcal{W}}$ ein Feld mit $\tilde{\mathcal{W}}|_{(B2)} = \mathcal{W}|_{(B2)}$; dann ist $\tilde{\mathcal{W}}$ unit. äquiv. zu $\mathcal{W}$, d.h. ein freies Feld zur gleichen Masse m.

+) $g = (a,\Lambda) \in P_+^\uparrow$; $f = f(x_o) \in \mathcal{S}$ eine Testfunktion

Beweis:

(Wir schreiben heuristisch A(x) statt $A_f(\underline{x})$.)

$\mathcal{W}$ ist ein verallgem. fr. Feld ; d.h. A(x) hat einen Kommutator von der Form

$$\left[A(x),\ A(y)\right] = c(x,y)\cdot 1 \text{ mit } c(x,y) = i\int d\rho(a^2)\,\Delta_{a^2}(x-y),$$

wobei $d\rho(a^2)$ ein pos. Maß und $\Delta_{a^2}(x-y)$ die 2-Punkt-funktion des freien Feldes zur Masse a.

Sei $\tilde{\Psi}_o$ das Vakuum zu $\tilde{U}(g)$. Wegen $\tilde{\mathcal{W}}\big|_{(B2)} = \mathcal{W}\big|_{(B2)}$ ist

$\tilde{H}'' =: \left\{\text{Polynom}\ (\tilde{A}(x''),\ldots)\,\tilde{\Psi}_o\right\} = H''$; deshalb $\tilde{\Psi}_o \in H''$ +)

Wegen $\tilde{A}(x'')\Psi = A(x'')\Psi$ für alle $\Psi \in H''$ ist

$\left[\tilde{A}(x''),\ \tilde{A}(y'')\right]\tilde{\Psi}_o = \left[A(x''),\ A(y'')\right]\tilde{\Psi}_o = c(x'',y'')\,\tilde{\Psi}_o$;

$x'' = (x_o,x_1,0,0)$; $y'' = (y_o,y_1,0,0)$

Zu jedem Punktepaar x,y gibt es ein $g = (a,\Lambda) \in P_+^\uparrow$;

so daß gx = x'' und gy = y''. Damit wird

$$\left[\tilde{A}(x),\ \tilde{A}(y)\right]\tilde{\Psi}_o = \tilde{U}(g)\left[\tilde{A}(x''),\ \tilde{A}(y'')\right]\tilde{\Psi}_o = c(x'',y'')\,\tilde{\Psi}_o = c(x,y)\tilde{\Psi}_o \quad (a)$$

Denn c(x,y) ist invariant unter den $g \in P_+^\uparrow$.

Aus (a) folgt bekanntlich mit Hilfe von Theorem 4-3 in [1] :

$$\left[\tilde{A}(x),\ \tilde{A}(y)\right] = c(x,y)\cdot 1 \quad (b)$$

$\tilde{A}(x)$ hat also denselben c-Zahl-Kommutator wie A(x).

Deshalb ist $\tilde{A}(x)$ ein verallgem. fr. Feld.

Außerdem sind durch den Kommutator (b) sämtliche Wightman-funktionen $F^{(n)}(x_1,\ldots x_n)$, n = 1,2,3..., eindeutig bestimmt (siehe Greenberg [10], Abschn.B). Also sind $\tilde{A}(x)$ und A(x) unitär äquivalent, wie behauptet.

+) Mit Hilfssatz 2 (Kap.I) sieht man leicht, daß $\tilde{\Psi}_o = c\Psi_o$.

Im allgemeinen ist es vermutlich nicht richtig, daß die Wightmanfelder mit einer gegebenen Restriktion (auch von dem schwachen Typ A1) unitär äquivalent sind. Man kann ein "Gegenbeispiel" bilden, wenn man die (nicht bewiesene) Annahme macht, daß es ein skalares Wightmanfeld gibt, das nicht kovariant unter der Raumspiegelung I_s ist. Die Aussage ist:

Wenn $\mathcal{W} = \{H, U(g), A_f(\underline{x})\}$ ein Wightmanfeld ist, das nicht kovariant unter I_s ist, dann definiert $\tilde{\mathcal{W}} = \{H, U(I_3 g I_3), A_f(I_3 \underline{x})\}$ ein Wightmanfeld mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\tilde{\mathcal{W}}$ ist nicht unitär äquivalent zu $\mathcal{W}$,

(ii) $\tilde{\mathcal{W}}|_{(A1)} = \mathcal{W}|_{(A1)}$.

Erläuterung:

"Kovarianz eines Feldes unter I_s": siehe Beweis zu Lemma 1, S.14.

I_3 bedeutet: $I_3(x_0,x_1,x_2,x_3) = (x_0,x_1,x_2,-x_3)$.

Mit $U(I_3 g I_3)$ ist folgendes gemeint:

I_3 definiert einen Automorphismus α der Gruppe $P_+^\uparrow$, nämlich

$\alpha : g \to \tilde{g} = I_3 g I_3$; wenn $g = (a,\Lambda)$, dann ist $\tilde{g} = (I_3 a, I_3 \Lambda I_3)$

Der Automorph. α definiert zu $U(g)$ die neue Darstellung $\tilde{U}(g) := U(\tilde{g}) = U(I_3 g I_3)$. (Im allg. sind $U(g)$ und $\tilde{U}(g)$ nicht unit. äquiv. ; vgl. Shirokov [9], Teil IV),

Beweis zur obigen Behauptung:

Zuerst ist zu zeigen, daß $\tilde{\mathcal{W}}$ ein Wightmanfeld ist:

$\tilde{U}(g)$ ist durch den Automorph. α definiert, $\tilde{U}(g)$ enthält also dieselbe Menge von unitären Operatoren wie $U(g)$.

Deshalb hat $\tilde{U}(g)$ dasselbe Vakuum Ψ_0 wie $U(g)$.

$\tilde{U}(a,1) = U(I_3 a,1)$ erfüllt die Spektrumsbedingung ;

denn seien $\{P_o, P_1, P_2, P_3\}$ die Erzeugenden der Darstellung $U(a,1)$; wie man leicht sieht, sind dann $\{P_o, P_1, P_2, -P_3\}$ die Erzeugenden von $\tilde{U}(a,1)$. Beide Darstellungen haben denselben Operator $P^2 = P_o - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2$.

Das Feld $\tilde{A}_f(\underline{x}) = A_f(I_3\,\underline{x})$ ist kovariant unter $\tilde{U}(a,\Lambda) = U(I_3\,a, I_3\Lambda I$

denn : für $\tilde{A}_f(\underline{x})$ schreiben wir heuristisch $\tilde{A}(x)$ $(x = (x_o, \underline{x}))$;

damit erhält man : $(I_3^2 = 1)$

$\tilde{U}(a,\Lambda)\ \tilde{A}(x)\ \tilde{U}(a,\Lambda)^{-1} = U(I_3\,a,\ I_3\Lambda I_3)\ A(I_3\,x)\ U(\ldots)^{-1} =$

$= A(I_3\Lambda x + I_3\,a) = \tilde{A}(\Lambda x + a)$.

$\tilde{A}_f(\underline{x})$ ist lokal kommutativ ; denn :

$\left[\tilde{A}(x), \tilde{A}(y)\right] = \left[A(I_3\,x), A(I_3\,y)\right] = 0$, wenn $I_3\,x - I_3\,y$ raumartig;

wegen $I_3(x-y) \cdot I_3(x-y) = (x-y)\cdot(x-y)$ ist $I_3(x-y)$ raumartig genau dann, wenn $x-y$ raumartig. -

$\tilde{A}_f(\underline{x})$ hat Ψ_o als zyklischen Vektor:

$U(g)$ und $\tilde{U}(g)$ haben beide das Vakuum Ψ_o.

Die Menge der Feldoperatoren $\tilde{A}_f(\underline{x}) = A_f(I_3\,\underline{x})$ ist dieselbe wie die Menge der $A_f(\underline{x})$; Ψ_o muß auch zyklischer Vektor für $\tilde{A}_f(\underline{x})$ sein.

Weiter ist zu zeigen, daß (i) gilt:

Angenommen, $\tilde{W}$ und W wären unitär äquivalent:

dann gäbe es ein unitäres V, so daß $\tilde{A}_f(\underline{x}) = V\,A_f(\underline{x})\,V^*$.

$\Rightarrow\ A_f(I_3\,\underline{x}) = V\,A_f(\underline{x})\,V^*$. (a)

Wie im Beweis von Lemma 1 betrachten wir die Drehung $\hat{R} = R_{12}(\pi)$:

$U(0,\hat{R})\ A_f(\underline{x})\ U(..)^{-1} = A_f(\hat{R}\,\underline{x})$.

Sei $V_1 =: V\,U(0,\hat{R})$; mit (a) folgt

$V_1\,A_f(\underline{x})\,V_1^* = V\,A_f(\hat{R}\,\underline{x})\,V^* = A_f(I_3\,\hat{R}\,\underline{x})$

Weil $I_3\,\hat{R} = I_s$ ist,

wäre $V_1\,A_f(\underline{x})\,V_1^* = A_f(I_s\,\underline{x}) = A_f(-\underline{x})$ $(V_1$ unitär) ;

nach der Voraussetzung sollte $A_f(\underline{x})$ aber nicht I_s-kovariant sein. (a) kann also nicht richtig sein ; d.h. $\tilde{\mathcal{W}}$ und $\mathcal{W}$ sind nicht unitär äquivalent.

Für (ii) müssen wir nur zeigen, daß $\tilde{U}(g') = U(g')$ für $g' \in G'$ (siehe Def.2-A1) und daß $\tilde{A}_f(\underline{x}') = A_f(\underline{x}')$ für $\underline{x}' = (x_1, x_2, 0)$. Das erste ergibt sich aus $I_3\, g'\, I_3 = g'$ für alle $g' \in G'$, (insbesondere auch für $g' = R_{23}(\pi)$ und $g' = R_{13}(\pi)$;) das zweite ist klar wegen $I_3\, \underline{x}' = \underline{x}'$.

Zur weiteren Behandlung des Problems:

Unser Problem, nämlich alle Felder $\tilde{\mathcal{W}}$ mit einer gemeinsamen Restriktion $\tilde{\mathcal{W}}\big|_{(\ldots)} = \mathcal{W}\big|_{(\ldots)}$ zu finden, behandeln wir zunächst nur für die schwächeren Restriktionen des Typs A1 (und A2). -

Wir können dieses Problem (z.B. für Typ A1) aufteilen in die beiden Fragen:

(1) Wir betrachten die Klasse der unitären Darstellungen von $P_+^\uparrow$, die die Spektralbedingung erfüllen und einen eindeutigen Vakuumzustand haben.
Durch das (feste) Wightmanfeld $\mathcal{W}$ ist die Darstellung $U(g)$ gegeben mit der Restriktion $U(g')$ auf die Untergruppe G' (siehe Def.2-A1). - Welche Darstellungen $\tilde{U}(g)$ gibt es, die dieselbe Restriktion $\tilde{U}(g') = U(g')$ haben?

(2) Nicht jedes dieser $\tilde{U}(g)$ definiert zusammen mit der gegebenen Restriktion $A_f(\underline{x}')$ des Feldoperators ein Wightmanfeld.-Zu bestimmen sind alle $\tilde{U}(g)$, die das tun.

Die Frage (1) für die genannte Klasse von Darstellungen wäre recht kompliziert. - Wir können eine wesentliche Vereinfachung

machen, indem wir zu den allgemeinen Axiomen (Kap.I) noch die Forderung der Existenz asymptotischer Zustände und der Vollständigkeit dieser Zustände im Hilbertraum hinzunehmen; (Theorie von Haag - Ruelle).

Mit dieser Forderung folgt nämlich: $U(g)$ ist immer Darstellung zu einem freien Feld. - Wir haben dann nur noch diese kleine Klasse von Darstellungen zu betrachten.

Der folgende Abschn.IV faßt zunächst diese Ergebnisse der Haag - Ruelle'schen Theorie zusammen. - Die Frage (1) ist dann leicht zu beantworten (siehe Lemma 3, S.25).

Mit der Frage (2) beschäftigen wir uns in Kap.V .

IV. Die Darstellungen $U(a,\Lambda)$ zu asymptot. vollständigen Feldern

Dieser Abschnitt behandelt die zusätzlichen Annahmen nach Haag - Ruelle - Jost, aus denen die asymptotische Vollständigkeit eines Feldes folgt; für uns ist wichtig, daß die dann in Frage kommenden Darstellungen $U(a,\Lambda)$ zu freien Feldern gehören.

Die Theorie der asymptotischen Zustände und Felder im Wightman'schen Rahmen stammt von R. Haag und D. Ruelle (siehe [3]); eine übersichtliche Zusammenfassung davon gibt R. Jost ([4], Kap.VI). Diese benutzen wir hier.

Wir setzen, wie schon bisher, ein skalares (hermitesches) Wightmanfeld voraus. Über die üblichen Wightman-axiome hinaus (vgl. Kap.1) werden hier folgende drei (nicht voneinander unabhängigen) Annahmen eingeführt:

(a) Das Spektrum des Operators P (gegeben durch $U(a,1) = e^{iP\cdot a}$) soll dasselbe sein wie für die Darstellung zu einem freien Feld der Masse $m>0$; das Spektrum von P besteht also aus folg. Punkten: +)

(1) der Punkt $p = (0,0,0,0)$, der zu dem 1-dimens. Teilraum $\{\Psi_o\}$ von H gehört;

(2) der Hyperboloid $K_m = \{p \mid p_o > 0,\ p^2 = m^2\}$, zum "Ein-teilchen-raum" H_1 von H;

(3) das Kontinuum $\overline{V}_+^{2m} = \{p \mid p_o > 0,\ p^2 \geq (2m)^2\}$, das zum Rest $H_2 + H_3 + \ldots$ von H gehört.

+) Vgl. z.B. Wightman [1], Abschnitt 1-4

(b) Die Restriktion von $U(a,\Lambda)$ auf den 1-Teilchenraum H_1 (vgl. Annahme (a)) soll die einfache Form $[m,0]$ haben; $U(a,\Lambda)\big|_{H_1}$ soll also irreduzibel sein und zur Masse $m > 0$ und zum Spin $j = 0$ gehören.

(c) Sei E_1 der Projektor auf H_1. Dann soll sein:
(mit der Schreibweise $A(x)$, $x \in M$, statt $A(\varphi)$)
$(\Psi_o, A(x)\, E_1\, A(y)\, \Psi_o) = i\Delta_+(m^2; x - y)$
(rechts die 2-Punkt-funktion des freien Feldes.)

Wenn ein Wightmanfeld $A(x)$ die zusätzlichen Eigenschaften (a), (b), (c) hat, können im Hilbertraum H asymptotische Zustände $\phi^{(in)}$ (einlaufend) und $\phi^{(out)}$ (auslaufend) definiert werden; (siehe Theorem 1 in [4], Kap.VI).
Die Gesamtheit dieser Zustände spannt einen Teilraum $H^{(in)}$ bzw. $H^{(out)}$ in H auf.

Die Forderung der asymptot. Vollständigkeit ist:

(d) $H^{(in)} = H$

Man kann weiter in H ein asymptotisches Feld $A^{(in)}(x)$ (ebenso $A^{(out)}(x)$) definieren mit den Eigenschaften (siehe Theorem 2 in [4]):

(1) $A^{(in)}(x)$ ist ein (skalares) freies Feld,

(2) $A^{(in)}(x)$ transformiert sich unter derselben Darstellung $U(a,\Lambda)$ wie das ursprüngliche Feld $A(x)$:
$U(a,\Lambda)\, A^{(in)}(x)\, U(a,\Lambda)^* = A^{(in)}(\Lambda x+a)$

Da ein Wightmanfeld seine Darstellung $U(a,\Lambda)$ eindeutig bestimmt, transformiert sich $A^{(in)}(x)$ und deshalb nach (2) auch $A(x)$ unter der Darstellung $U(a,\Lambda) = U_o(a,\Lambda)$ zu einem freien Feld.

Im 1-Teilchenraum hatten wir die irreduzible Darstellung $[m,0]$, also zum Spin $j = 0$ und zur Masse $m > 0$, angenommen +)
(Annahme (b)); deshalb ist $U_o(a,\Lambda)$ gegeben durch

$$U_o(a,\Lambda) = 1 \oplus [m,0] \oplus \left([m,0] \times [m,0]\right)_S \oplus \oplus \left([m,0] \times [m,0] \times [m,0]\right)_S \oplus \ldots \quad \Big\} (Z)$$

Entsprechende Zerlegung des Hilbertraums: $H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$

$H_o = \{\Psi_o\}$; H_1 = 1-Teilchenraum; usw.

$\left([m,0] \times [m,0]\right)_S$ usw. ist das symmetrisierte direkte Produkt.

Für eine explizite Realisierung der Darstellung $U_o(a,\Lambda)$ in (Z) siehe Wightman [1], Abschnitt 3-2.

Mit $\mathfrak{U}_o$ bezeichnen wir die Klasse der Darstellungen von $P_+^{\uparrow}$, die die Form (Z) haben.

Dann gilt das folgende einfache

Lemma 3:

Zwei Darstellungen $U(a,\Lambda)$, $\tilde{U}(a,\Lambda) \in \mathfrak{U}_o$, die dieselbe Restriktion auf die Untergruppe T_o (der Zeittranslationen) haben, (also $U(\bar{a},1) = \tilde{U}(\bar{a},1)$ für $\bar{a} = (a_o, \underline{0})$), gehören zu demselben Parameter m, d.h. sie sind unitär äquivalent.

Beweis:

Sei $U(a,\Lambda) \in \mathfrak{U}_o$ Darstellung zum Parameter m (>0) ;

$\tilde{U}(a,\Lambda) \in \mathfrak{U}_o$ " zum Parameter $\tilde{m}$ (>0).

Sei $P = (P_o, P_1, P_2, P_3)$ erzeugender Operator zu $U(a,1)$,

$\tilde{P} = (\tilde{P}_o, \ldots\ldots)$ " zu $\tilde{U}(a,1)$.

+) Wir betrachten der Einfachheit halber nicht Darstellungen zur Masse $m = 0$.

P und $\tilde{P}$ haben ein Spektrum, wie in Annahme (a) (Anfang dieses Kapitels) angegeben. Man überlegt sich leicht, daß deshalb P_o und $\tilde{P}_o$ folgende Spektren S_o bzw. $\tilde{S}_o$ haben ;

$$S_o = \{p_o = 0\} \cup \{p_o \mid p_o \geq m\} \quad ;$$

$$\tilde{S}_o = \{p_o = 0\} \cup \{p_o \mid p_o \geq \tilde{m}\}$$

Wegen der Voraussetzung $U(\bar{a},1) = \tilde{U}(\bar{a},1)$ für $\bar{a} = (a_o, \underline{0})$ müssen P_o und $\tilde{P}_o$ dasselbe Spektrum haben:

$S_o = \tilde{S}_o$; daraus folgt $m = \tilde{m}$.

Zwei Darstellungen U, $\tilde{U} \in \mathfrak{U}_o$ zu demselben Parameter m sind aber unitär äquiv. ; das folgt aus der Definition von

$[m,0]$, $([m,0] \times [m,0])_s$, usw.

V. Zu den Restriktionen vom Typ A

Wir betrachten nun Wightmanfelder, die außer den üblichen Forderungen auch die Forderung der asymptotischen Vollständigkeit des Hilbertraums erfüllen. (Bedingungen (a), (b), (c), (d) des vorigen Abschnitts). Wir haben gesehen, die zu einem solchen Feld gehörige unitäre Darstellung $U(g)$ $(g \in P_+^\uparrow)$ ist Darstellung zu einem freien Feld.

Bezeichnung: $\mathcal{U}_0$ sei die Klasse der unit. Darstellungen $U(g)$ zu den freien Feldern der Massen $m > 0$. Das sind also die Darstellungen von der Form (Z), S. 25. -

Zu einem festen Wightmanfeld $\mathcal{W} = \{H, U(g), A_f(\underline{x})\}$ ++) suchen wir alle Felder $\tilde{\mathcal{W}} = \{H, \tilde{U}(g), \tilde{A}_f(\underline{x})\}$, die dieselbe Restriktion vom Typ A1 +) haben, also

$$\tilde{\mathcal{W}}\big|_{(A1)} = \mathcal{W}\big|_{(A1)} = \{H, U(g'), A_f(\underline{x}')\}$$

mit $g' \in G'$ und $\underline{x}' = (x_1, x_2, 0)$ (Vgl.Def. 2-A1, Abschn.II)

Wir können dazu zunächst Lemma 3 (S.25) benutzen:

Weil die Untergruppe G' die Zeittranslationen enthält und die Darstellungen $\tilde{U}(g)$ und $U(g)$ dort übereinstimmen, ist nach Lemma 3:

$\tilde{U}(g) = V\, U(g)\, V^*$ mit einem unit. Operator V.

Wegen $\tilde{U}(g') = U(g')$ für $g' \in G'$ ist $[V, U(g')] = 0$.

+) Die folgenden Aussagen für Typ A1 lassen sich leicht auch auf Typ A2 übertragen. - Als Beispiel ist die Lemma 4 entsprechende Aussage als Korollar dazu aufgeschrieben.

++) $g = (a, \Lambda) \in G = P_+^\uparrow$; $f = f(x_0)$ eine Testfunktion

Wir wissen also: 2 Felder $\mathcal{W}$ und $\tilde{\mathcal{W}}$ mit gemeinsamer A1-Restriktion haben unit. äquivalente Darstellungen $U(g) \cong \tilde{U}(g)$. - Diese Feststellung reicht anscheinend nicht aus zu der Folgerung, daß auch die Feldoperatoren $A_f(\underline{x})$ und $\tilde{A}_f(\underline{x})$ unit. äquivalent sind.

Um weiterzukommen, bestimmen wir näher die unitären V in der Gleichung $\tilde{U}(g) = V\, U(g)\, V^*$. Außer der Eigenschaft $[V, U(g')] = 0$ muß V nämlich noch andere Bedingungen erfüllen, damit $\tilde{U}(g)$ zusammen mit der gegebenen Restriktion $A_f(\underline{x}')$ des Feldoperators ein Wightmanfeld ergibt.

Das folgende Lemma gibt diese Bedingungen an und charakterisiert mit Hilfe von V die gesuchten Felder $\tilde{\mathcal{W}}$ zu gegebener Restriktion. (Wie schon gesagt, wird immer $U(g)$, $\tilde{U}(g) \in \mathcal{U}_0$ angenommen.)

Lemma 4:

Sei $\mathcal{W} = \{H, U(g), A_f(\underline{x})\}$ ein Wightmanfeld.

I. Angenommen, $\tilde{\mathcal{W}} = \{H, \tilde{U}(g), \tilde{A}_f(\underline{x})\}$ ist ein Wightmanfeld mit derselben Restriktion vom Typ A1 wie $\mathcal{W}$, d.h. $\tilde{\mathcal{W}}|_{(A1)} = \mathcal{W}|_{(A1)} = \{H, U(g'), A_f(\underline{x}')\}$.
Dann gibt es einen unitären Operator V, so daß

(a) $\tilde{U}(g) = V\, U(g)\, V^*$

(b) $\tilde{A}_f(\underline{x}) = V\, U(\hat{\underline{x}},1)\, V^*\, A_f(\underline{x}')\, V\, U(-\hat{\underline{x}},1)\, V^*$

$\left(\underline{x}' = (x_1,x_2,0)\ ;\ \hat{\underline{x}} = (0,0,x_3)\right)$

V hat folgende Eigenschaften:

(i) $[V, U(g')] = 0$ für $g' \in G'$

(ii) $[V\, U(0, R_{23})\, V^*, A_f(\underline{0})] = 0$ für die Drehungen R_{23} in der 2-3-Ebene

(iii) Die $\tilde{A}_f(\underline{x})$ in (b) bilden eine irreduzible Menge von Operatoren. +)

Außerdem ist $V\psi_o = e^{i\alpha}\psi_o$.

II. Sei V ein unitärer Operator, der die Bedingungen (i), (ii), (iii) erfüllt; dann definiert V durch (a), (b) ein Wightmanfeld $\tilde{\mathcal{W}} = \{H, \tilde{U}(g), \tilde{A}_f(\underline{x})\}$, das die Restriktion $\tilde{\mathcal{W}}|_{(A1)} = \mathcal{W}|_{(A1)}$ besitzt.

+) Also: (in heuristischer Schreibweise): Wenn ein beschränkter Operator B die Eigenschaft $[B, A_f(\underline{x})] = 0$ für alle f und $\underline{x}$ hat, dann ist $B = c\,1$. Genauere Definition siehe [1], Abschn. 3-1.
Für ein Wightmanfeld ist bekanntlich die Irreduzibilität des Feldoperators gleichwertig mit der Zyklizität des Vakuums (vgl. Theorem 4-5 in [1]).

Korollar: (zu Lemma 4)

Die entsprechende Aussage für Restriktionen vom Typ A2 lautet:

Sei $\mathcal{W}$ ein Wightmanfeld.

I. Angenommen, $\tilde{\mathcal{W}}$ ist ein Wightmanfeld mit $\tilde{\mathcal{W}}\big|_{(A2)} = \mathcal{W}\big|_{(A2)}$;

dann gibt es einen unitären Operator V, so daß

(a)' $\tilde{U}(g) = V\, U(g)\, V^*$

(b)' $\tilde{A}_f(\underline{x}) = V\, U(\hat{\underline{x}},1)\, V^*\, A_f(\underline{x}'')\, V\, U(-\hat{\underline{x}},1)\, V^*$ $\left(\underline{x}''=(x_1,0,0);\ \hat{\underline{x}}=(0,x_2,x_3)\right)$

V hat die Eigenschaften:

(i)' $\left[V,\ U(g'')\right] = 0$ für $g'' \in G''$

(ii)' $\left[V,\ U(0,R)\, V^*,\ A_f(\underline{0})\right] = 0$ für alle Drehungen R im (x_1,x_2,x_3) -Raum.

(iii)' die Operatoren $\tilde{A}_f(\underline{x})$ in (b)' bilden eine irreduz. Menge.

Außerdem ist $V\Psi_o = e^{i\alpha}\Psi_o$.

II. Jeder unit. Operator V, der (i)' bis (iii)' erfüllt, definiert durch (a)', (b)' ein Wightmanfeld $\tilde{\mathcal{W}}$, das die Restriktion $\tilde{\mathcal{W}}\big|_{(A2)} = \mathcal{W}\big|_{(A2)}$ besitzt.

Beweis zu Lemma 4: (Der Beweis besteht nur in elementaren Rechnungen.)

Zu Teil I:

Nach der Voraussetzung haben die Felder $\tilde{\mathcal{W}}$ und $\mathcal{W}$ die gemeinsame Restriktion $\tilde{\mathcal{W}}\big|_{(A1)} = \mathcal{W}\big|_{(A1)} = \left\{H,\ U(g'),\ A_f(\underline{x}')\right\}$;

$g' \in G'$, $\underline{x}' = (x_1,x_2,0)$.

G' enthält als Untergruppe die Zeittranslationen T_o.

Nach Lamma 3 (Abschn.IV) können wir deshalb schließen:

$$\tilde{U}(g) = V\, U(g)\, V^* \ , (V \text{ unitär}). \qquad (a)$$

Die Kovarianz von $\tilde{A}_f(\underline{x})$ unter den Translationen $\tilde{U}(a,1)=V\, U(a,1)\, V^*$ ergibt dann sofort (wegen der gemeinsamen Restriktion

$\tilde{A}_f(\underline{x}') = A_f(\underline{x}')$) :

$$\tilde{A}_f(\underline{x}) = V\, U((0,0,0,x_3),1)\, V^* A_f(\underline{x}')\, V' U(\ldots.)^* V^* \qquad (b)$$

Die behaupteten Eigenschaften sind sofort ersichtlich:

zu (i) : nach Voraussetzung ist $\tilde{U}(g') = U(g')$; mit (a) folgt die Behauptung.

zu (ii) : der Feldoperator $\tilde{A}_f(\underline{x})$ ist kovariant unter $\tilde{U}(a,\Lambda)$; Speziell: $\tilde{U}(0,R_{23})\, A_f(\underline{0})\, \tilde{U}(0,R_{23})^* = A_f(\underline{0})$ mit (a) folgt die Behauptung.

zu (iii) : $\tilde{\omega}$ ist nach Voraussetzung ein Wightmanfeld ; deshalb bilden die Feldoperatoren $A_f(\underline{x})$ eine irreduzible Menge.

Die Eigenschaft $V\Psi_o = e^{i\alpha}\Psi_o$ ergibt sich so: der Vektor $\tilde{\Psi}_o = V\Psi_o$ ist offensichtlich der Vakuumzustand der Darstellung $\tilde{U}(a,\Lambda) = V\, U(a,\Lambda)\, V^*$; $\tilde{\Psi}_o$ und Ψ_o sind beide invariant unter den Zeittranslationen $U(\bar{a},1)$, $\bar{a} = (a_o,\underline{0})$; nach Hilfssatz 2 (Abschn.I) gibt es aber nur einen unter $U(\bar{a},1)$ invarianten Zustand, deshalb ist $\tilde{\Psi}_o = e^{i\alpha}\Psi_o$; (wenn man annimmt $(\Psi_o,\Psi_o) = (\tilde{\Psi}_o,\tilde{\Psi}_o) = 1$)

Zu Teil II:

Wir nehmen jetzt an, daß V die Bedingungen (i), (ii), (iii) erfüllt, und müssen zunächst zeigen, daß dann durch (a), (b) (siehe Teil I des Lemmas) ein Wightmanfeld definiert wird.

1.) $\tilde{U}(a,\Lambda) = V\, U(a,\Lambda)\, V^*$ erfüllt die Spektralbedingung ; denn $V\, U(a,1)\, V^*$ und $U(a,1)$ haben dasselbe Spektrum. $\tilde{U}(a,\Lambda)$ hat als Vakuumzustand $\tilde{\Psi}_o = V\Psi_o$ und kann auch keinen anderen Zustand invariant lassen ;

2.) Kovarianz von $\tilde{A}_f(\underline{x})$ unter $\tilde{U}(a,\Lambda)$:

Wir benutzen die heurist. Schreibweise ; statt $A_f(\underline{x})$ schreiben wir $A(x)$; $x = (x_0,x_1,x_2,x_3)$.

Es genügt, einzeln

(α) die Translationskovarianz $\tilde{U}(a,1)\ \tilde{A}(x)\ \tilde{U}(a,1)^* = \tilde{A}(x+a)$

und (β) die Lorentzkovarianz in der Form

$\tilde{U}(0,\Lambda)\ \tilde{A}(0)\ \tilde{U}(0,\Lambda)^* = \tilde{A}(0)$ zu zeigen. Denn dann folgt +)

aus (α) $\tilde{A}(x) = \tilde{U}(x,1)\ A(0)...$

und mit (β) : $\tilde{U}(a,\Lambda)\ \tilde{A}(x)... = \tilde{U}(a,\Lambda)\ \tilde{U}(x,1)\ A(0)... = \tilde{U}(\Lambda x+a,1)\ \tilde{U}(0,\Lambda)\ A(0)... = \tilde{A}(\Lambda x+a)$

$\tilde{A}_f(\underline{x})$ (oder heuristisch $\tilde{A}(x)$) ist gegeben durch (b) (Teil I des Lemmas), also $\tilde{A}(x) = V\ U(\hat{x},1)\ V^*\ A(x')...$

mit $x' = (x_0,x_1,x_2,0)$

$\hat{x} = (0,0,0,x_3)$

Zu (α) : $\tilde{U}(a,1)\ \tilde{A}(x)... = V\ U(a+\hat{x},1)\ V^*\ A(x')... = A(x'+\hat{x}+a) = \tilde{A}(x+a)$

Zu (β): zu zeigen ist : $\tilde{U}(0,\Lambda)\ A(0)\ \tilde{U}(0,\Lambda)^* = A(0)$

Für $\Lambda = \Lambda' \in G'$ (Λ' ist also eine homogene Lorentztransf. im 0-1-2-Raum) ist wegen Bed. (i) $\tilde{U}(0,\Lambda') = U(0,\Lambda')$; da das Feld $A(x)$ als Wightmanfeld vorausgesetzt ist, gilt $\tilde{U}(0,\Lambda')\ A(0)\ \tilde{U}(0,\Lambda')^* = A(0)$.

Ebenso gilt für die Drehungen R_{23} in der 2-3-Ebene wegen der Bed. (ii) (in heuristischer Schreibweise)

$\tilde{U}(0,R_{23})\ A(0)\ \tilde{U}(0,R_{23})^* = A(0)$.

Da sich jede homogene Lorentztransf. $\Lambda \in L_+^\uparrow$ als Produkt von Transformationen Λ' und Drehungen R_{23}

+) Statt $U\,A(x)\,U^*$ mit einem unit. Operator U schreiben wir $U\ A(x)....$.

schreiben läßt, folgt $\tilde{U}(0,\Lambda)\ A(0)\ \tilde{U}(0,\Lambda)^* = A(0)$.

Damit ist die Kovarianz von $\tilde{A}(x)$ unter $\tilde{U}(a,\Lambda)$ gezeigt.

3.) Lokalität:

Die Lokalität von $\tilde{A}(x)$ folgt aus der Lokalität der Restriktion $\tilde{A}(x') = A(x')$, $x' = (x_0,x_1,x_2,0)$, und der (a,Λ)-Kovarianz von $\tilde{A}(x)$, die wir eben gezeigt haben.

Im einzelnen:

$A(x)$ ist lokal ; deshalb ist $\left[A(x'),\ A(y')\right] = \left[\tilde{A}(x'),\ \tilde{A}(y')\right] = 0$, wenn $(x'-y')^2 < 0$;

mit $x' = (x_0,x_1,x_2,0)$; $y' = (y_0,y_1,y_2,0)$.

Zu jedem Punktepaar $u,v \in M$ (4-dimens. Raumzeit) gibt es eine Transformation $g = (a,\Lambda) \in P_+^\uparrow$, so daß $gu = u_1 \in M' = \left\{x' = (x_0,x_1,x_2,0)\right\}$ und $gv = v_1 \in M'$

(Das gilt auch noch für den kleineren Teilraum $M'' = \left\{x'' = (x_0,x_1,0,0)\right\}$.)

Wir wissen, $\tilde{A}(x)$ ist kovariant unter $\tilde{U}(g)$;

seien $u,v \in M$ zwei Punkte mit $(u-v)^2 < 0$; dann wird

$\left[\tilde{A}(u),\ \tilde{A}(v)\right] = \tilde{U}(g)\left[A(u_1),\ A(v_1)\right]\tilde{U}(g)^*$.

Aus $(u-v)^2 < 0$ folgt $(gu-gv)^2 = (u_1-v_1)^2 < 0$;

in der vorletzten Zeile wird also $\left[A(u_1),\ A(v_1)\right] = 0$,

deshalb auch $\left[\tilde{A}(u),\ \tilde{A}(v)\right] = 0$, wenn $(u-v)^2 < 0$.

4.) Irreduzibilität:

Diese Eigenschaft wird durch Bed. (iii) direkt verlangt. —

Schließlich prüfen wir noch, daß $\tilde{W}\big|_{(A1)} = W\big|_{(A1)}$ gilt:

$\tilde{U}(g') = U(g')$ für $g' \in G'$

ist erfüllt wegen $\tilde{U}(g) = V\ U(g)\ V^*$ und der Bed. (i).

$\tilde{A}_f(\underline{x}') = A_f(\underline{x}')$ ergibt sich sofort aus (b) (Teil I des Lemmas) für den Fall, daß $\hat{\underline{x}} = (0,0,0)$.

Damit ist der Beweis von Lemma 4 beendet.

Um Näheres über die Menge der Feldoperatoren $\tilde{A}_f(x)$ zu erfahren, die sich nach Lemma 4 als $\tilde{A}_f(\underline{x}) = V\, U(\hat{\underline{x}},1)\, V^*\, A_f(\underline{x}')\, V\, U(-\hat{\underline{x}},1)\, V^*$ schreiben lassen, müßte man nun mehr über die unitären V wissen.

Der Deutlichkeit wegen führen wir folgende Bezeichnung ein:

Sei $\mathcal{W} = \{H, U(g), A_f(\underline{x})\}$ ein Wightmanfeld. Dann bezeichnen wir mit $\mathfrak{V}$ die Menge der unitären Operatoren V, die die Bedingungen (i), (ii), (iii) in Lemma 4 erfüllen.

Offensichtlich liefern verschiedene Operatoren $V_1, V_2 \in \mathfrak{V}$ nicht immer verschiedene Feldoperatoren $(A_f)_1(\underline{x})$, $(A_f)_2(\underline{x})$; sei z.B. $V_1 = 1$ und V_2 ein unit.Op. mit $[V_2, U(g)] = 0$, (das heißt $V_1, V_2 \in \mathfrak{V}$) ; V_1 und V_2 liefern beide das ursprüngliche Feld $A_f(\underline{x})$. - Zwischen zwei Operatoren $V_1, V_2 \in \mathfrak{V}$ braucht man nicht zu unterscheiden, wenn sie im Sinne von Lemma 4 denselben Feldoperator $\tilde{A}_f(\underline{x})$ definieren, oder etwas allgemeiner: wenn sie Feldoperatoren definieren, die zueinander unitär äquivalent sind.

Definition 3:

Die Operatoren $V_1, V_2 \in \mathfrak{V}$ sollen "A-äquivalent" heißen, wenn die durch sie definierten Feldoperatoren

$(A_f)_i(\underline{x}) = V_i\, U(\hat{\underline{x}},1)\, V_i^*\, A_f(\underline{x}')\, V_i\, U(-\hat{\underline{x}},1)\, V_i^*$

$(i = 1,2\ ;\ \hat{\underline{x}} = (0,0,x_3))$ unitär äquiv. sind .

Leicht beweisbar ist folgendes

Lemma 5:

Zwei Operatoren $V_1, V_2 \in \mathfrak{V}$ sind A-äquivalent genau dann, wenn es einen unit. Op. T gibt, so daß $\left[T, A_f(\underline{x}')\right] = 0$ und $\left[V_1^* T V_2, U(\hat{\underline{x}},1)\right] = 0$ (mit $\hat{\underline{x}} = (0,0,x_3)$)

Beweis:

1. Angenommen, $V_1, V_2 \in \mathfrak{V}$ sind A-äquivalent.
   Dann gibt es ein unitäres T, so daß $(A_f)_1(\underline{x}) = T(A_f)_2(\underline{x})\, T^*$ (§)
   Wegen $(A_f)_1(\underline{x}') = (A_f)_2(\underline{x}') = A_f(\underline{x}')$ ist $\left[T, A_f(\underline{x}')\right] = 0$.
   Die zu $(A_f)_i(\underline{x})$ gehörige Darst. heiße $U_i(g)$; (i=1,2).
   Es gilt $U_i(g) = V_i\, U(g)\, V_i^*$.
   Aus (§) folgt wegen Hilfssatz 1 (Abschn.I): $U_1(g) = T\, U_2(g)\, T^*$
   Durch Umschreiben erhält man $\left[V_1^* T V_2, U(g)\right] = 0$,
   also mit $g = (\hat{\underline{x}},1)$ die Behauptung.

2. Angenommen, zu $V_1, V_2 \in \mathfrak{V}$ gibt es ein unit. T mit
   $\left[T, A_f(\underline{x}')\right] = 0$ und $\left[V_1^* T V_2, U(\hat{\underline{x}},1)\right] = 0$ (§§)
   Der Operator V_i liefert (im Sinne von Lemma 4) den Feldop.
   $(A_f)_i(\underline{x}) = V_i\, U(\hat{\underline{x}},1)\, V_i^*\, A_f(\underline{x}')\ldots$ (i=1,2)
   Mit (§§) folgt

$$T(A_f)_2(\underline{x})\, T^* = V_1(V_1^* T V_2)\, U(\hat{\underline{x}},1)\, V_2^*\, A_f(\underline{x}')\ldots$$
$$= V_1\, U(\hat{\underline{x}},1)\, V_1^*\, T\, A_f(\underline{x}')\ldots = (A_f)_1(\underline{x})\ ;$$

Damit ist Lemma 5 bewiesen.

Mit Lemma 4 und 5 sind die Wightmanfelder $\mathfrak{W}$ zu einer gegebenen Restriktion vom Typ A1 (oder A2) leider nur implizit charakterisiert. - Nötig wäre eine Auswertung der Bedingungen

(i),(ii),(iii), die die Menge $\mathfrak{D}$ definieren; (vgl. Lemma 4).

Bedingung (i) ist rein darstellungstheoretisch und macht keine Schwierigkeiten ; man kann aber sehen, daß eine ziemlich große Klasse von unitären Operatoren die Bedingung (i) erfüllt.

Bedingungen (ii) und (iii) sind "feldtheoretisch" und anscheinend recht undurchsichtig.

Es ist leider nicht gelungen, daraus eine einfache Aussage zu gewinnen.

Literaturverzeichnis

[1] R.F. Streater, A.S. Wightman
"TCP, Spin and Statistics and All That", New York-Amsterdam 1964.

[2] H.J. Borchers
"Field Operators as C^{∞}-Functions in Spacelike Directions" Nuovo Cimento vol. 23, no. 6, 1600-1613 (1964)

[3] D. Ruelle
"On the Asymptotic Condition in Quantum Field Theory" Helv. Phys. Acta 35, 147-163 (1962)

[4] R. Jost
"The General Theory of Quantized Fields", The American Mathematical Society 1965

[5] A. Barut, A.S. Wightman
"Relativistic Invariance and Quantum Mechanics" Nuovo Cimento Suppl. 14, 81-94 (1959)

[6] E.P. Wigner
"On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group" Ann. Math. 40, 149-204 (1939)

[7] G.W. Mackey
"Group Representations in Hilbert Space" Anhang in "Mathem. Problems in Relativistic Physics" von I.E. Segal, Providence (R.I.) 1963

[8] G.W. Mackey
"The Theory of Group Representations" (Lecture Notes) Department of Mathematics, The University of Chicago, 1955

[9] Ju.M. Shirokov

"A Group-Theoretical Consideration of the Basis of Relativistic Quantum Mechanics"

Teil I: Soviet Physics JETP, 6, 664-673 (1958)

Teil II: " , 6, 919-928 (1958)

Teil III: " , 6, 929-935 (1958)

Teil IV: " , 7, 493-498 (1958)

[10] O.W. Greenberg

"Generalized Free Fields and Models of Local Field Theory" Ann.of Phys. 16, 158 - 176 (1961)

Michael Schmidt

1944	geb. in Wuppertal
1950 - 54	Grundschule
1954 - 63	Canisius-Kolleg-Gymnasium in Berlin (Abitur 1963)
1963 - 66	Studium der Physik an der TU Berlin (Vordiplom 1966)
ab 1966	Studium an der Universität Göttingen; Diplomarbeit bei Prof. G. Lüders zum Thema: "Berechnung des kritischen Magnetfeldes H_{c3} für verunreinigte Supraleiter"
1969	Diplomprüfung
1969 - 73	Doktorarbeit bei Prof. H.J. Borchers über "Wightmanfelder mit gemeinsamer Restriktion auf einen Unterraum"